# MATHÉMATIQUES : ÉPREUVE B

## FILIÈRE PHYSIQUE ET CHIMIE

**DURÉE : 2 heures 30.**

---

*N.B. : Ce sujet comporte 3 pages de texte.*

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de [0,1] vers $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par :

$$\forall\ f, g \in E, \qquad (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Pour $f \in E$, on notera : $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$.
Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de E constitué des applications polynomiales de [0,1] vers $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on notera $e_k : x \longmapsto x^k$
$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

## PARTIE I

Pour $f \in \mathcal{P}$, on définit $g = \Delta(f)$ par :

$$\forall\ x \in [0,1], \quad g(x) = (x^2-x)\ f''(x) + (2x-1)\ f'(x)$$

1. Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathcal{P}$, vérifiant :
$$\forall\ f, h \in \mathcal{P} \quad (\Delta(f)|h) = (\Delta(h)|f).$$

2. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et l'unicité de $L_k \in \mathcal{P}$, de degré k, vérifiant : $L_k(0) = 1$ et $\Delta(L_k) = k(k+1)L_k$.
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathcal{P}_n$ muni du produit scalaire induit par celui de E.

3. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $L_k$ en fonction de la dérivée $k^{ième}$ de : $x \longmapsto x^k(x-1)^k$.

b. En déduire une relation entre $\|L_k\|^2$ et $I_k = \int_0^1 t^k(t-1)^k dt$, grâce à des intégrations par parties.

c. Calculer $I_k$ puis $\|L_k\|$.

d. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathcal{L}_k = \frac{L_k}{\|L_k\|}$. Que peut-on dire de $\left(\mathcal{L}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ?

e. Expliciter $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$.

4. Soit $f \in E$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose : $\gamma_k = (f|\mathcal{L}_k)$.

Justifier la convergence de $\sum_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k^2$ et l'inégalité : $\sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k^2 \leq \|f\|^2$.

Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pourra considérer la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_n$.

5. On suppose ici n=2, et on considère l'espace euclidien $\mathcal{P}_2$ muni du produit scalaire induit.

a. Déterminer : $d^2(e_2,\mathcal{P}_1) = \text{Min}\left\{\|e_2 - g\|^2 , g \in \mathcal{P}_1\right\}$.

b. Soit $\sigma : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ défini par :

$$\forall f \in P_2, \forall x \in [0,1], \left(\sigma(f)\right)(x) = f(1-x).$$

Montrer que $\sigma$ est un endomorphisme de $\mathcal{P}_2$ auto-adjoint, et déterminer une base orthogonale de $\mathcal{P}_2$ formée de vecteurs propres pour $\sigma$. Montrer que $\sigma$ est une réflexion.

c. Soit $\mathcal{B} : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ défini par :

$$\forall f \in \mathcal{P}_2, \forall x \in [0,1], \quad \mathcal{B}(f)(x) = \sum_{k=0}^{2} C_2^k f\left(\frac{k}{2}\right) x^k(1-x)^{2-k}.$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est un endomorphisme de $\mathcal{P}_2$ et déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $\mathcal{B}$.

d. Pour $f \in \mathcal{P}_2$, comparer : $\Delta\circ\sigma(f)$ et $\sigma\circ\Delta(f)$, ainsi que $\Delta\circ\mathcal{B}(f)$ et $\mathcal{B}\circ\Delta(f)$.

e. Déterminer la matrice de l'adjoint de $\mathcal{B}$ relativement à la base $(\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)$.

## PARTIE II

A tout $f \in E$, on associe $g = T(f)$ défini par :

$$\forall\, x \in [0,1],\quad g(x) = \int_0^1 \min(x,y).f(y)dy.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E, vérifiant :
$$\forall\, f, h \in E,\quad \big(T(f)\,|\,h\big) = \big(T(h)\,|\,f\big).$$

2. Montrer que si $f \in E$ et $g = T(f)$, alors g est de classe $C^2$ sur [0,1] et vérifie : $g(0) = g'(1) = 0$, $g'' = -f$.

3. Réciproquement si $g \in E$, est de classe $C^2$ sur [0,1] et vérifie $g(0) = g'(1) = 0$, montrer que $T(-g'') = g$.

4. Montrer que T est injective et non surjective (en tant qu'endomorphisme de E).

5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\lambda_k = \dfrac{4}{\pi^2(2k+1)^2}$ et $\varphi_k : x \longmapsto \sin\left(\dfrac{2x}{(2k+1)\pi}\right)$, $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

   a. Montrer que si l'on note $E_\lambda = \{f \in E \,/\, T(f) = \lambda f\}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\{\lambda_k \,/\, k \in \mathbb{N}\}$ est exactement l'ensemble des réels $\lambda$ tels que $E_\lambda$ soit non réduit à $\{0\}$.

   b. Que peut-on dire de $\left(\varphi_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ?

6. a. Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $2\pi$-périodique, telle que $F(x) = |x|$ si $x \in [-\pi,\pi[$.

   Calculer ses coefficients de Fourier et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

   b. Comparer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^2$ avec $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^1 \big(\min(x,y)\big)^2\, dy\right] dx$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail